

# Chapitre 2 : Cinématique des fluides

## 2.1 Introduction

La cinématique des fluides a pour objet la description de l'évolution d'un milieu fluide dans l'espace-temps indépendamment des causes et des lois qui la régissent. Dans le cadre de la mécanique classique, l'espace et le temps sont considérés comme indépendants : le temps est paramétré sur l'axe des réels et l'espace est assimilé à un espace affine associé à un espace vectoriel euclidien de dimension 3. La cinématique d'un corps matériel n'a de sens que dans le cadre de la définition d'un référentiel. On appelle « référentiel  $\mathcal{R}$  » la donnée de 4 points de l'espace non coplanaires formant un trièdre rigide et d'une chronologie.

Une difficulté caractéristique surgit dès qu'on aborde l'étude de la cinématique d'un milieu fluide (ou d'un milieu continu en général) qui consiste à la description même du mouvement du fluide. En effet, pour décrire le mouvement d'un point matériel ou même d'un solide, on suit d'une manière systématique le système dans sa trajectoire et donc on adopte, du point de vue de la mécanique des milieux continus, naturellement une description « lagrangienne » du mouvement. Dans le cas d'un milieu continu, la description lagrangienne reste encore suffisante notamment lorsque le milieu continu est soumis à une petite déformation. Cependant, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les milieux fluides sont considérés comme des milieux continus susceptibles de subir des fortes déformations au cours desquelles la configuration initiale du système est quasiment oubliée. Par conséquent, une description Lagrangienne s'avère dans le cas général peu adaptée aux applications pratiques dans le cas des milieux fluides. On recourt dans la plupart des cas à un autre type de description du mouvement : « La description eulérienne ».

Dans le second paragraphe nous nous proposons de revenir sur les différentes méthodes de description du mouvement d'un milieu fluide. Au troisième paragraphe nous introduisons la notion de dérivée particulière ou matérielle. Nous établissons les équations traduisant le principe de

conservation de la masse au quatrième paragraphe. Au dernier paragraphe nous décrivons l'étude graphique des écoulements.

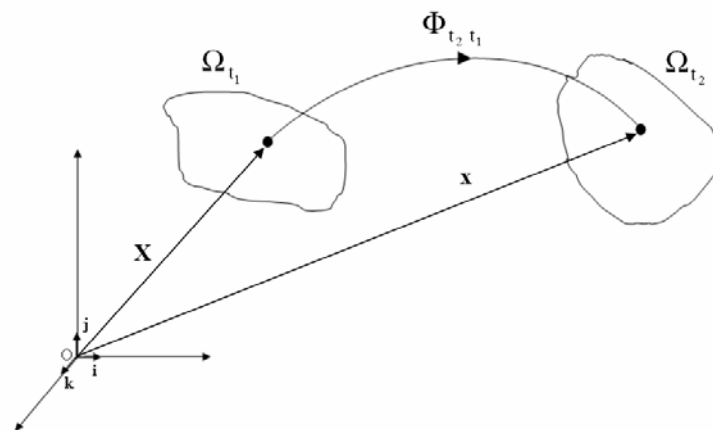
## 2.2 Description de l'écoulement d'un fluide

Un milieu fluide, considéré comme un milieu continu, peut être représenté comme une association d'un très grand nombre de particules fluides (paragraphe 1.4.1) constituant d'un point de vue mathématique un ensemble  $M$ . Cet ensemble susceptible d'évoluer au cours du temps, existe indépendamment du domaine  $\Omega$  de l'espace qu'il occupe à un instant donné de son évolution. On peut reproduire (dans un référentiel  $\mathcal{R}$ ) le mouvement de ce milieu fluide en décrivant le mouvement de chacune des particules. On reconstitue ainsi au cours du temps les configurations instantanées successives  $\Omega_t$  de ce fluide dans l'espace sachant le mouvement de chacune des particules. On note par configuration instantanée le domaine de l'espace occupé par l'ensemble  $M$  des particules à l'instant  $t$ .

D'un point de vue mathématique, la description cinématique de l'écoulement d'un milieu fluide entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  peut se restreindre à l'étude de l'opérateur de transformation :

$$\begin{aligned} \Phi_{t_2 t_1} : \Omega_{t_1} &\rightarrow \Omega_{t_2} \\ \mathbf{X} &\mapsto \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2-1)$$

$\mathbf{X}$  et  $\mathbf{x}$  étant les deux vecteurs position d'une particule fluide de  $M$  respectivement aux instants  $t_1$  et  $t_2$  comme le montre la figure suivante :



**Figure 1** : Transformation entre deux configurations

La fonction  $\Phi_{t_2 t_1}$  est évidemment bijective. Elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\Phi_{t_3 t_1} = \Phi_{t_3 t_2} \circ \Phi_{t_2 t_1} \quad (2-2)$$

$$\Phi_{t t} = \text{Id} \quad (2-3)$$

$$\Phi_{t_2 t_1} = [\Phi_{t_1 t_2}]^{-1} \quad (2-4)$$

L'hypothèse de continuité du milieu implique la continuité de cette transformation. Elle est également supposée de classe  $C^2$  sur son domaine de définition ( $\Omega_{t_1}$ ).

## 2.2.1 Description lagrangienne

Si on choisit la configuration du milieu fluide  $\Omega_0$  à l'instant  $t = 0$  comme une configuration de référence, sa configuration  $\Omega_t$  à l'instant  $t$  peut être déduite à l'aide de l'opérateur de transformation  $\Phi_{t 0}$ . La position géométrique  $\mathbf{x}$  de la particule P, identifiée dans la configuration  $\Omega_0$  par sa position  $\mathbf{X}$ , est donnée par la relation suivante :

$$\mathbf{x} = \Phi_{t 0}(\mathbf{X}) \quad (2-5)$$

On définit ainsi la fonction  $\Phi$  donnée par l'expression :

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t) \quad (2-6)$$

qui permet de déterminer la position  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$  connaissant  $(\mathbf{X}, t)$ . La relation (2-6) ci-dessus représente l'équation horaire de la trajectoire de la particule P.

La description lagrangienne du mouvement du fluide consiste à décrire les grandeurs physiques caractéristiques du milieu à l'instant  $t$  dans la configuration  $\Omega_t$  comme des fonctions de la variable  $\mathbf{X}$  dans  $\Omega_0$  et du temps  $t$ . Les trois composantes  $X_i$  ainsi que le temps  $t$  sont appelés « *les variables de Lagrange* ». En d'autres termes, dans la description lagrangienne on identifie les particules fluides et on les suit dans leurs mouvements. Toute grandeur physique  $\psi$  associée à une particule est exprimée en fonction des variables de Lagrange  $\psi = \psi(X_i, t)$ .

Comme les variables  $X_i$  sont indépendantes du temps, la dérivée matérielle (ou particulière) de cette grandeur s'identifie à sa dérivée partielle par rapport au temps :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (2-7)$$

En particulier, la vitesse et l'accélération sont données par les relations suivantes :

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad ; \quad \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \quad (2-8)$$

D'un point de vue pratique, la mise en œuvre de la méthode lagrangienne est mieux adaptée à l'étude de la cinétique des solides ou des milieux continus peu déformables, tandis que pour la description de l'écoulement d'un fluide elle n'est pas aussi évidente. Toutefois, il existe des cas d'applications pratiques où on a recours à cette méthode telle que l'étude d'une dispersion d'inclusions dans un fluide.

## 2.2.2 Description eulérienne

A la différence de la description lagrangienne où on identifie les particules, la description eulérienne consiste à fixer un point d'observation  $\mathbf{x}$  dans l'espace et à enregistrer au cours du temps la vitesse  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  des particules fluides qui défilent en ce point. C'est le résultat obtenu par une sonde fixe placée en un point donné qui enregistre la vitesse locale et instantanée d'un écoulement de fluide. Ainsi sur un volume de contrôle fixe par rapport au repère d'observation et choisi de façon arbitraire, la description eulérienne définit l'écoulement du fluide par la donnée à chaque instant  $t$  du champ de vitesse  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  en tout point  $\mathbf{x}$  de ce domaine. Les coordonnées spatiales  $x_i$  ainsi que le temps  $t$  représentent les variables d'Euler ( $x_i, t$ ). Toute grandeur physique locale intensive  $\psi$  caractéristique de l'écoulement sera définie comme une fonction  $\psi(x_i, t)$  des variables d'Euler dans l'espace-temps. En particulier, les composantes des champs de vitesse et d'accélération s'écrivent :

$$u_i = \frac{dx_i}{dt} = u_i(x_i, t) \quad \text{et} \quad a_i = \frac{d^2x_i}{dt^2} = a_i(x_i, t) \quad (2-9)$$

Sur le plan purement géométrique, la description eulérienne est plus cohérente avec la description incrémentale de l'évolution du milieu fluide. En effet, à chaque instant l'évolution infinitésimale à venir y est définie sur la configuration actuelle. En d'autres termes, le mouvement étant défini par la donnée du champ de vitesse actuel  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t)$ , c'est le gradient de ce champ qui définit localement la transformation infinitésimale. Le tenseur des taux de déformations donné par la partie symétrique de ce gradient de vitesse (voir paragraphe 1.4.2), qui est un tenseur eulérien, caractérise la déformation locale élémentaire. Tandis que le tenseur des taux de rotations correspondant à la partie antisymétrique de ce gradient, qui est de même un tenseur eulérien, caractérise la rotation locale élémentaire du milieu fluide.

Sur le plan pratique, l'approche eulérienne est mieux adaptée à l'étude expérimentale de l'écoulement des milieux fluides.

### 2.2.3 Correspondance entre descriptions lagrangienne et eulérienne

D'un point de vue mathématique, les deux descriptions eulérienne et lagrangienne sont équivalentes. En effet, en partant d'une description eulérienne d'un écoulement donnée par le champ de vitesse  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , on peut écrire à l'aide de la relation lagrangienne (2-6) :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}[\Phi(\mathbf{x}, t), t] = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (2-10)$$

Réciproquement, en partant d'une description lagrangienne donnée par la fonction de transformation  $\Phi$  entre l'instant initial et un instant  $t$  donné, (2-6), on peut déduire la position initiale  $\mathbf{X}$  comme suit :

$$\mathbf{X} = \Phi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2-11)$$

On peut ainsi écrire :

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}[\Phi^{-1}(\mathbf{x}, t), t] = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (2-12)$$

D'un point de vue pratique, on peut apercevoir la différence entre les deux descriptions lagrangienne et eulérienne en assimilant la description lagrangienne à une prise de photo de l'écoulement avec un temps de pose (c'est le temps d'ouverture de l'obturateur en photographie) s'étalant de 0 à  $t$ . Tandis que la description eulérienne est assimilée à une prise de photo instantanée et actuelle où l'on suppose qu'on connaisse en tout point de cette photo la vitesse de l'écoulement.

## 2.3 Dérivée particulaire

On distingue entre deux types de grandeurs physiques caractéristiques d'un milieu fluide :

1. Les grandeurs intensives locales : telles que la vitesse, la température ou la concentration d'un élément chimique
2. les grandeurs extensives intégrales : qui sont stockées dans des volumes telles que la masse, l'énergie ou la quantité de mouvement. Ces grandeurs peuvent être représentées par des intégrales de densité volumique :

$$\mathbf{B} = \int_{\tau} \mathbf{b} \, d\tau \quad (2-13)$$

où  $\mathbf{b}$  est la densité volumique qui est une grandeur locale intensive.

Selon la description de l'écoulement, ces grandeurs sont attachées aux particules fluides ou à l'élément matériel concerné (en description lagrangienne), ou définies en tant que des fonctions locales des variables d'Euler ou sous forme d'intégrale sur un volume de contrôle indépendant de l'écoulement (description eulérienne). Il en résulte que la dérivée particulaire ou dite également matérielle diffère selon la description.

### 2.3.1 Dérivée particulaire lagrangienne

Nous avons déjà vu que la dérivée particulaire d'une grandeur locale en description lagrangienne est identifiée à la dérivée partielle par rapport au temps (équation (2-7)).

Une grandeur intégrale peut être représentée comme suit :

$$\mathbf{B} = \int_{\Omega_t} \mathbf{b} \, d\Omega_t = \int_{\Omega_0} \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) \, d\Omega_0 \quad (2-14)$$

Comme on peut intervertir l'intégration spatiale et la dérivation temporelle, on peut écrire :

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \frac{d\mathbf{b}(\mathbf{X}, t)}{dt} \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \, d\Omega_0 \quad (2-15)$$

La dérivée particulaire lagrangienne s'obtient alors dans tous les cas par une dérivation partielle par rapport au temps. Cette relation est valable quel que soit l'ordre tensoriel de la grandeur  $\mathbf{B}$ .

## 2.3.2 Dérivée particulaire eulérienne

### 2.3.2.1 Dérivée particulaire d'une grandeur locale intensive

D'un point de vue mathématique, nous avons vu qu'une grandeur locale intensive  $\psi$  est représentée en description eulérienne par une fonction à quatre variables (variables d'Euler)  $\psi(x_i, t)$ . Il en résulte que son différentiel s'exprime comme suit :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} dt + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx_i \quad (2-16)$$

Soit alors la dérivée particulaire eulérienne de  $\psi$  qui s'écrit :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left( \frac{dx_i}{dt} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad (2-17)$$

Ou encore compte tenu de (2-9) :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad (2-18)$$

L'écriture tensorielle de cette relation est formulée comme suit :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi \quad (2-19)$$

Cette relation est valable quel que soit l'ordre tensoriel de la grandeur  $\psi$ .

La dérivée particulaire eulérienne d'une grandeur locale intensive comporte deux contributions : une première contribution représentée par la dérivée partielle par rapport au temps. Elle correspond à la variation locale au cours du temps de cette grandeur. Elle est la seule cause de variation de  $\psi$  au point  $\mathbf{x}$  si la particule en ce point à l'instant  $t$  est immobile. Une seconde contribution représentée par le produit contracté des champs de vitesse de l'écoulement  $\mathbf{u}$  et de  $\nabla\psi$ . C'est un terme de variation spatiale de  $\psi$  dû au transport convectif par l'écoulement de cette grandeur. Cette contribution est la seule cause de variation de la grandeur si l'écoulement est stationnaire.

Afin de mieux mettre en évidence cette notion, on se propose de raisonner par rapport à l'accélération de l'écoulement. Ce champ d'accélération est donné en description eulérienne par :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} \quad (2-20)$$

Dans cette expression on a :

- La première contribution  $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}$  représente l'accélération locale au point  $(x_i, t)$  due au caractère instationnaire de l'écoulement. C'est l'accélération subie par un « bloc de fluide » où on maintient un champ de vitesse uniforme.
- La seconde contribution  $\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}$  représente la variation spatiale de la vitesse de l'écoulement environnant vue par une particule fluide, même si l'écoulement est stationnaire, lorsqu'il est non uniforme. C'est l'accélération par exemple de l'écoulement stationnaire d'un fluide dans un convergent. Une particule fluide allant dans le sens de rétrécissement voit sa vitesse augmenter progressivement.

En développant le second terme représentant l'accélération spatiale dans (2-20) comme suit :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} = \nabla \left[ \frac{1}{2} u^2 \right] + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} \quad (2-21)$$

on pourra écrire l'accélération de l'écoulement sous la forme suivante :

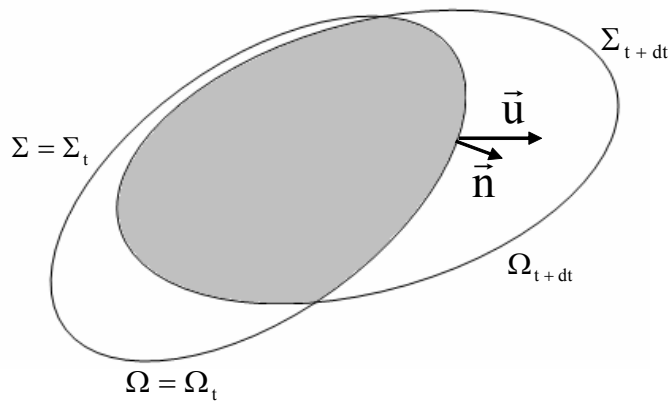
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left[ \frac{1}{2} u^2 \right] + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} \quad (2-22)$$



### 2.3.2.2 Dérivée particulière d'une grandeur intégrale extensive : le Théorème de transport

Soit un volume de contrôle  $\Omega$  choisi arbitrairement dans l'espace. Une grandeur intégrale extensive calculée sur ce domaine peut être exprimée par la forme intégrale conformément à l'équation (2-13).

On considère la configuration  $\Omega_t$  d'une partie du milieu fluide qui coïncide avec le volume de contrôle  $\Omega$  à l'instant  $t$ . Cette configuration subit au cours de la durée élémentaire  $dt$  une transformation infinitésimale pour se transférer à la configuration  $\Omega_{t+dt}$  comme l'illustre la figure suivante :



**Figure 2 :** Deux configurations voisines  $\Omega_t = \Omega$  et  $\Omega_{t+dt}$

La variation élémentaire de  $B$  au cours d'un temps infinitésimal  $dt$  est liée à deux facteurs :

- La variation locale au sein de  $\Omega$  (destruction ou création de  $B$ ) représentée en tout point de ce volume par une variation locale de la densité  $b$  :

$$dB_1 = dt \int_{\Omega} \frac{\partial b}{\partial t} d\tau \quad (2-23)$$

- L'échange avec le milieu extérieur à travers la surface  $\Sigma$ . Cet échange correspond au transport convectif de  $B$  au cours de la transformation de  $\Omega_t$  à  $\Omega_{t+dt}$  :

$$dB_2 = dt \oint_{\Sigma} b(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) ds = dt \oint_{\Sigma} (b\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} ds \quad (2-24)$$

On en déduit alors la forme générale de la dérivée particulaire de la grandeur intégrale  $B$  qui s'écrit :

$$\frac{dB}{dt} = \frac{dB_1}{dt} + \frac{dB_2}{dt} = \int_{\Omega} \frac{\partial b}{\partial t} d\tau + \oint_{\Sigma} (b\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} ds \quad (2-25)$$

Cette relation implique que le taux de variation de  $B$  est égal au taux d'accumulation à l'intérieur du volume de contrôle  $\Omega$  ajouté au taux d'échange avec le milieu extérieur à travers la surface  $\Sigma$ .

## 2.4 Conservation de la masse

### 2.4.1 Principe de conservation de la masse

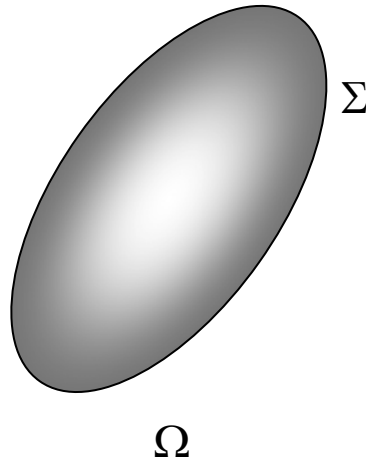
Dans le cadre de la physique classique, le principe de conservation de la masse stipule qu'il n'y a ni destruction ni création de la masse.

On note que dans ce cadre les deux concepts : masse et énergie ne sont pas encore unifiés. C'est la célèbre relation d'Einstein  $E = mc^2$  qui les a unifiés dans le cadre de la théorie de la relativité (restreinte ou générale).

D'autre part, au niveau d'un milieu fluide (ou continu en général), l'hypothèse de continuité vérifiée dans ce milieu (voir paragraphe 1.4.1) vérifiée dans ces milieux impliquent que les particules fluides qui forment à l'instant initial un ensemble continu forment encore à tout instant un ensemble continu. Il en résulte que les particules qui se trouvent à l'instant initial dans une surface matérielle fermée continuent à être piégées dans la surface transformée à tout instant. On note par surface matérielle une surface constituée par les mêmes particules matérielles au cours du temps. On déduit alors que la masse contenue dans une surface matérielle fermée reste constante au cours du temps.

## 2.4.2 Forme intégrale de conservation de la masse en description eulérienne

La masse globale contenue dans un volume de contrôle  $\Omega$  délimitée par la surface  $\Sigma$  montrée sur la figure suivante :



**Figure 3 :** Volume de contrôle arbitraire

Peut s'exprimer comme suit :

$$M = \int_{\Omega} \rho d\tau \quad (2-26)$$

Où  $\rho$  est la masse volumique du milieu fluide. Le principe de conservation de la masse se résume par :

$$\frac{dM}{dt} = 0 \quad (2-27)$$

D'après le théorème de transport (2-25), la forme intégrale eulérienne de conservation de la masse s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \oint_{\Sigma} (\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (2-28)$$

En description eulérienne, la conservation globale de la masse s'énonce ainsi : Le taux d'accumulation de la masse dans  $\Omega$  est égal au flux de la masse à travers la surface  $\Sigma$  qui le délimite. Si le fluide est incompressible, le champ de vitesse devient un champ à flux conservatif.

### 2.4.3 Forme locale de conservation de la masse en description eulérienne : Equation de continuité

En utilisant le théorème de la divergence (appelé également de Green ou d'Ostrogorski), on peut transformer l'intégrale sur la surface  $\Sigma$  qui figure dans (2-28) en une intégrale de volume sur  $\Omega$ . On obtient alors après avoir sommé les deux intégrales :

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] d\tau = 0 \quad (2-29)$$

La relation écrite ci-dessus est valable quel que soit le volume de contrôle  $\Omega$  considéré. Elle implique par conséquent que la fonction à l'intérieur de l'intégrale est nulle. On en déduit ainsi la forme locale de conservation de la masse qui s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2-30)$$

Cette équation peut être réécrite en développant le second membre :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \rho) + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2-31)$$

Elle fait apparaître sous cette forme la dérivée particulaire de la masse volumique. Si le fluide est incompressible l'équation locale de conservation de la masse se réduit à :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2-32)$$

Cette équation montre que le champ de vitesse est dans ce cas conservatif. Elle exprime qu'un élément du fluide se déforme en écoulement en conservant son volume.

On note à ce niveau qu'un fluide est considéré incompressible lorsque la masse volumique  $\rho$  reste constante le long de la trajectoire d'une particule fluide. Ce qui permet de considérer des écoulements de fluides hétérogènes (ex : écoulements stratifiés) comme étant des écoulements de fluides incompressibles.

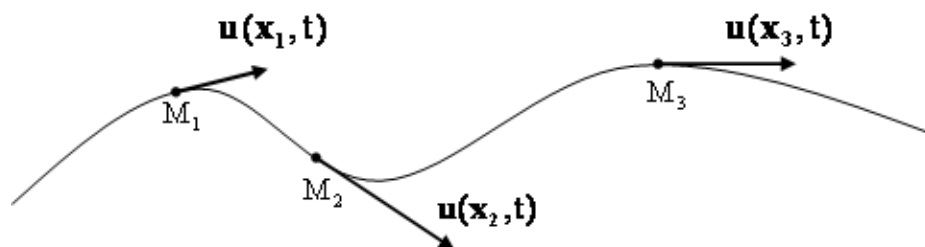
## 2.5 Etude graphique de cas d'écoulements

L'étude graphique d'un écoulement se fait en traçant à l'instant  $t$  une carte de l'écoulement. Cette carte est représentée à l'aide de courbes caractéristiques outre que les trajectoires des particules fluides. Ces lignes sont : les *lignes de courant* et les *lignes d'émission*. Ces deux familles de courbes peuvent être visualisées et retracées dans certains cas d'écoulements et peuvent mener, rien qu'avec des considérations cinématiques, à établir des propriétés caractéristiques des écoulements étudiés.

### 2.5.1 Lignes d'émission – Lignes de courant – Tubes de courant

Une ligne d'émission est une courbe qui relie, à un instant donné, l'ensemble des particules fluides qui sont passées à un instant antérieur par un point donné qui s'appelle *le point d'émission*.

Une ligne de courant correspond à une ligne du champ de vitesse de l'écoulement dans un volume de contrôle à un instant donné. C'est une ligne où le vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  est tangent en tout point comme le montre la figure suivante.



**Figure 4 :** Ligne de courant

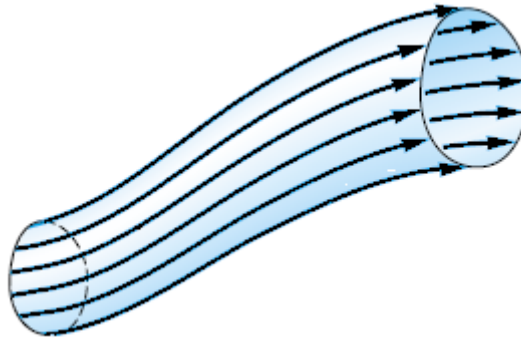
D'un point de vue mathématique, si on considère un déplacement élémentaire  $d\mathbf{l} = dl_1 \mathbf{e}_1$  sur une ligne de courant, elle sera définie par la relation suivante :

$$\mathbf{u} \wedge d\mathbf{l} = \vec{0} \quad (2-33)$$

Ce qui implique dans le système des coordonnées cartésiennes la relation suivante :

$$\frac{u_1}{dx_1} = \frac{u_2}{dx_2} = \frac{u_3}{dx_3} \quad (2-34)$$

Un tube de courant est une surface composée de lignes de courant et qui s'appuie sur un contour fermé.



**Figure 5 :** Tube de courant

Le vecteur vitesse de l'écoulement  $y$  est tangent en tout point. Il en résulte que le fluide ne traverse pas la paroi d'un tube de courant, et donc le débit qui traverse une section droite d'un tube de courant reste constant.

En revenant sur la famille des trajectoires, chaque particule fluide que l'on suit dans son mouvement (description lagrangienne) décrit une trajectoire qu'on détermine en résolvant l'équation suivante :

$$dt = \frac{u_1}{dx_1} = \frac{u_2}{dx_2} = \frac{u_3}{dx_3} \quad (2-35)$$

On note d'après les deux relations (2-34) et (2-35) qu'en régime stationnaire les trajectoires des particules fluides, les lignes de courant et les lignes d'émission sont confondues. Elles constituent un réseau de courbes constant au cours du temps. Cependant, en régime instationnaire, les lignes de courant et d'émission évoluent au cours du temps et ne coïncident pas entre elles ni avec les trajectoires des particules.

## 2.5.2 Visualisation expérimentale

Une ligne d'émission relative à un point peut être visualisée en injectant de façon continue un colorant en ce point. Le filet de colorant qui évoluera dans l'écoulement est matérialisé par les

particules fluides qui sont passées à un instant antérieur par le point d'injection. Si l'écoulement est permanent, la ligne observée caractérise également une trajectoire des particules et une ligne de courant qui sont confondues.

Une visualisation des trajectoires des particules fluides peut être réalisée en introduisant dans le fluide des particules réfléchissantes. Une prise de photo de l'écoulement avec un temps de pose assez long permet d'obtenir une image des trajectoires des particules réfléchissantes.

Une ligne de courant peut être visualisée après traitement de deux images successives du domaine d'observation de l'écoulement prises avec un temps de pose très court. Le décalage entre les deux photos montre pour une particule fluorescente donnée la distance parcourue pendant l'intervalle de temps séparant les deux images ainsi que sa direction. Ces informations permettent de restituer toutes les caractéristiques du champ de vitesse de l'écoulement dans le domaine d'observation.

La figure suivante montre l'écoulement instationnaire derrière un cylindre visualisé par des lignes d'émission et des lignes de courant. La première image en haut montre les lignes d'émission matérialisées par l'injection d'un colorant fluorescent sur le cylindre et des lignes de courant représentées par les lignes fin tracées suite au passage de particules réfléchissantes. La seconde image en bas montre les lignes d'émission extraites et les lignes de courant reconstruites\*.

On voit bien sur ces images que les lignes d'émission et de courant ne sont pas confondues à cause de l'instationnarité de l'écoulement.



**Figure 6 :** Ecoulement instationnaire derrière un cylindre<sup>\*</sup>

<sup>(\*)</sup> Hydrodynamique Physique, Marc Fermigier, ESPCI – ParisTech, Laboratoire d’Hydrodynamique et de Mécanique Physique



## 2.5.3 Fonction courant en écoulement incompressible bidimensionnel

Nous avons vu que le champ de vitesse de l'écoulement d'un fluide incompressible est à flux conservatif (équation (2-32) :  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ) . D'un point de vue mathématique, on peut définir un champ vectoriel  $\mathbf{A}$  tel que l'on ait :

$$\mathbf{u} = \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (2-36)$$

Cette relation s'écrit à l'aide du pseudo-tenseur d'orientation  $\theta$  sous sa forme indicelle suivante :

$$u_i = \theta_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \quad (2-37)$$

$\mathbf{A}$  correspond à un potentiel vectoriel.

Si l'écoulement est bidimensionnel évoluant dans le plan  $(x_1, x_2)$ , ceci implique les deux relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \equiv 0 \quad ; \quad u_3 = 0 \quad (2-38)$$

D'où, l'équation (2-37) se réduit à :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} \\ u_2 = -\frac{\partial A_3}{\partial x_1} \end{cases} \quad (2-39)$$

On définit ainsi un potentiel scalaire  $\Psi = \Psi(x_1, x_2) = A_3$  appelé *fonction courant* permettant de déduire le champ de vitesse bidimensionnel :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \\ u_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \end{cases} \quad (2-40)$$

L'équation de continuité s'écrit dans ce cas :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad (2-41)$$

D'où on déduit la relation suivante vérifiée par  $\Psi$  :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad (2-42)$$

$\Psi$  est alors une différentielle totale exacte. Son différentiel admet une primitive unique et on a :

$$\int_A^B d\Psi = \Psi_B - \Psi_A \quad (2-43)$$

indépendamment du chemin suivi entre les points A et B.

D'autre part, les courbes définies par la relation :  $\Psi = \text{cte}$  correspondent aux lignes de courant. En effet, dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} d\Psi &= 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} dx_2 &= 0 \\ u_1 dx_2 - u_2 dx_1 &= 0 \\ \frac{u_1}{dx_1} &= \frac{u_2}{dx_2} \end{aligned} \quad (2-44)$$

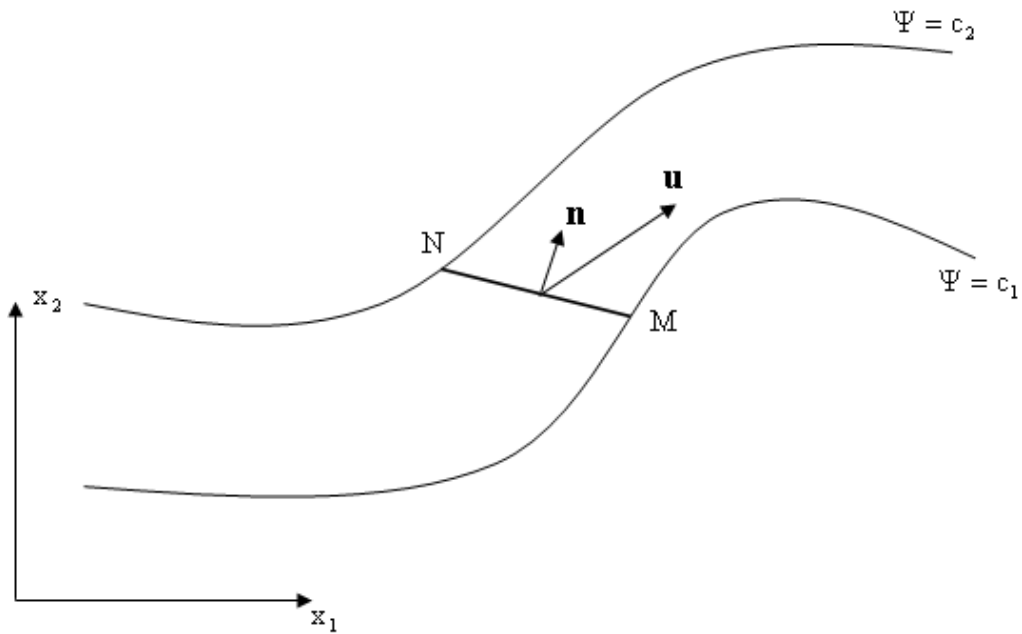
On a également le débit unitaire (ou par unité de longueur selon la direction  $x_3$ ) du fluide entre deux lignes de courant  $\Psi = c_1$  et  $\Psi = c_2$  est égal à la différence :

$$\Delta\Psi = c_2 - c_1 \quad (2-45)$$

En effet, ce débit est donné par :

$$Q = \int_M^N (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dl \quad (2-46)$$

Où  $\mathbf{n}$  est un vecteur unitaire normal à la section MN comme le montre la figure suivante :



**Figure 7 :** Ecoulement entre deux lignes de courant

Pour un déplacement élémentaire tangent  $d\mathbf{l} = dx_1\mathbf{e}_1 + dx_2\mathbf{e}_2$  à la section MN, le vecteur  $\mathbf{n} dl$  sera donné par :

$$\mathbf{n}dl = dx_1\mathbf{e}_1 - dx_2\mathbf{e}_2 \quad (2-47)$$

Et le débit est égal à :

$$\begin{aligned} Q &= \int_M^N u_1 dx_1 - u_2 dx_2 \\ &= \int_M^N \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} dx_2 \\ &= \int_M^N d\Psi \\ &= c_2 - c_1 \end{aligned} \quad (2-48)$$